Tema 1: Espacios de Medida

11-18 de marzo de 2010

Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- Ω es un conjunto no vacío
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una **σ**-álgebra:

  (i) $\Omega \in \mathcal{A}$

  (ii) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

  (iii) $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es una medida (positiva):

  (a) $\mu(\emptyset) = 0$

  (b) μ es **σ**-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; A_n \cap A_m = \emptyset \; (n \neq m) \;\;\Rightarrow\;\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

- Toda intersección de σ-álgebras es una σ-álgebra
- Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, existe la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{S}$
- Ω espacio topológico con topología $\mathcal{T}$: la σ-álgebra de Borel de Ω es la engendrada por $\mathcal{T}$. Sus elementos son los conjuntos de Borel en Ω.

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{A}$

1. Orden en $[0,\infty]$

$[0,\infty]$

$$[0,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \cup \{\infty\} = [0,\infty[\cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0,\infty[$
- $x \leqslant \infty \quad \forall\, x \in [0,\infty]$.

Propiedades del orden

- Orden total
- Todo subconjunto no vacío de $[0,\infty]$ tiene supremo e ínfimo

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$]\alpha,\beta[= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta \in [0,\infty])$$
$$]\alpha,\infty] = \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0,\infty])$$
$$[0,\beta[= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0,\infty])$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta \in \mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}$
- $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geqslant n\}$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} y_n, \quad \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \to x,\ \{y_n\} \to y \quad \Rightarrow \quad x \leqslant y$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

- Suma usual en $[0,\infty[$
- $x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\, x\in[0,\infty]$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$
- Compatible con el orden: $x_1\leqslant y_1,\ x_2\leqslant y_2\ \Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$
- Continua: $\{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y\ \Rightarrow\ \{x_n+y_n\}\to x+y$
- Tiene sentido la suma de cualquier serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$
- Incondicional: Para $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,\infty]$ y $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ biyectiva, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m,n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a(m,n) = \sum_{k=1}^{\infty} a\big(\sigma(k)\big)$$

Producto en $[0,\infty]$

Producto en $[0,\infty]$

- Producto usual en $[0,\infty[$
- $x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall\, x \in]0,\infty]$
- $0\,\infty = \infty\,0 = 0$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2 \Rightarrow x_1 x_2 \leqslant y_1 y_2$
- Crecientemente continuo: $\{x_n\} \nearrow x,\ \{y_n\} \nearrow y \Rightarrow \{x_n y_n\} \to x y$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Concepto de Medida

Medida

$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N},\quad A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Medidas de Borel

Medida de Borel en un espacio topológico Ω = Medida definida en la σ-álgebra de Borel de Ω

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B)$
- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_1) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Sugestivamente: $\{A_n\} \nearrow A \quad \Rightarrow \quad \{\mu(A_n)\} \nearrow \mu(A)$
Mientras que: $\{A_n\} \searrow A,\ \mu(A_1) < \infty \quad \Rightarrow \quad \{\mu(A_n)\} \searrow \mu(A)$

Primeros Ejemplos de medidas

Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$ arbitrario, $m : \Omega \to [0,\infty]$ cualquier función y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x) := \sup\left\{\sum_{x \in J} m(x) : J \subseteq A,\ J \text{ finito}\right\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

Medidas de Dirac

Fijado $x \in \Omega$, para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con $m(x) = 1$ y $m(\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

Medida que cuenta (“counting measure”)

Para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define $\mu(A)$ como el número de elementos de A, entendiéndose que $\mu(A) = \infty$ cuando A es un conjunto infinito.
Se obtiene con $m(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \, : \, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Medida de Lebesgue

- Conjuntos medibles-Lebesgue:

$$\mathcal{M} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \, : \, \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

- Medida de Lebesgue: $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$

$$\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty], \quad \lambda(E) = \lambda^*(E) \ \ \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$
- $\lambda|_{\mathcal{B}}$ (medida de Borel-Lebesgue) es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$ que extiende a m
- También λ es la única medida definida en $\mathcal{M}$ que extiende a m

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \operatorname{ínf}\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists G\ :\ E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists F\ :\ F = \overline{F} \subset E,\ \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$, conjunto de tipo G_δ con $\lambda(B \setminus E) = 0$
- $E \supseteq A$, conjunto de tipo F_σ con $\lambda(E \setminus A) = 0$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) &= \operatorname{ínf}\{\lambda(G)\ :\ G \text{ abierto},\ G \supseteq E\} \\ &= \sup\{\lambda(K)\ :\ K \text{ compacto},\ K \subseteq E\} \end{aligned}$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones: $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones: $E \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; E+x \in \mathcal{M}$, en cuyo caso, $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$, finita en compactos e invariante por traslaciones.
- La hipótesis "finita en compactos" se puede sustituir por la existencia de un conjunto abierto no vacío con medida finita
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es invariante por isometrías.

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes
- Medidas de Haar
- Medidas de Hausdorff